BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2005

RİYAZİYYAT

ЗАДАЧА ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НЕИЗВЕСТНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Г.К.НАМАЗОВ, Г.Х.ШАФИЕВА
Бакинский Государственный Университет

Работа посвящена изучению вопросов существования и единственности классического решения одной обратной краевой задачи для параболического уравнения второго порядка с несамосопряженными краевыми условиями.

Рассмотрим следующую обратную краевую задачу:

$$a(t)u_t + p(t)u = u_{xx} + f(x,t), \quad (x,t) \in D_T = \{(x,t) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T\}, \quad (1)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1, \quad (2)$$

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(0,t) = u_x(1,t), \quad 0 \le t \le T, \quad (3)$$

$$u(1,t) = h(t), \quad 0 \le t \le T, \quad (4)$$

где $p(t), h(t), \varphi(x), f(x,t)$ – заданные функции, а $u(x,t)$ и $a(t)$ – искомые функции, причем под классическим решением задачи (1)-(4) понимаем следующее

Определение. Классическим решением задачи (1)-(4) назовем пару $\{u(x,t), a(t)\}$ функций $u(x,t)$ и $a(t)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. функция $u(x,t)$ непрерывна в D_T вместе со всеми производными, входящими в уравнение (1);
2. функция $a(t)$ непрерывна и положительна на $[0,T]$;
3. уравнение (1) и условия (2)-(4) выполняются в обычном смысле.

Справедлива следующая

Лемма. Пусть выполняется условие согласования

$$\varphi(1) = h(0) \quad (5)$$

и $h(t) \in C^1[0,T]$, $h'(t) \ne 0$ при $t \in [0,T]$. Тогда задача (1)-(4) эквивалентна задаче определения функций $u(x,t)$ и $a(t)$ из (1)-(3) и

$$a(t)h'(t) + p(t)h(t) = u_{xx}(1,t) + f(1,t) \cdot \qquad (6)$$

Доказательство. Пусть $\{u(x,t), a(t)\}$ является решением задачи (1)-(4). Из (1) имеем:

$$a(t)u_t(1,t) + p(t)u(1,t) = u_{xx}(1,t) + f(1,t) . \qquad (7)$$

Отсюда, с учетом (4), легко приходим к выполнению (6).

Теперь предположим, что $\{u(x,t), a(t)\}$ является классическим решением задачи (1)-(3) и (6). Тогда из (6), с учетом (7), получаем

$$a(t)(u(1,t) - h(t))'_t + p(t)(u(1,t) - h(t)) = 0 . \qquad (8)$$

В силу (3) и условия согласования (5), имеем:

$$u(1,0) - h(0) = \varphi(1) - h(0) = 0 \cdot \qquad (9)$$

Таким образом, из (8) и (9) вытекает, что $u(1,t) - h(t) = 0$. Следовательно, выполняется условие (4). Лемма доказана.

Из [1] известно, что последовательности функций

$$\mathrm{X}_0(x) = x, \ldots, \mathrm{X}_{2k-1}(x) = x \cos \lambda_k x, \quad \mathrm{X}_{2k}(x) = \sin \lambda_k x, \ldots \ (\lambda_k = 2\pi k), \quad (10)$$

$$\mathrm{Y}_0(x) = 2, \ldots, \mathrm{Y}_{2k-1}(x) = 4\cos\lambda_k x, \quad \mathrm{Y}_{2k}(x) = 4(1-x)\sin\lambda_k x, \ldots \ (\lambda_k = 2\pi k), \quad (11)$$

образуют в $L_2(0,1)$ биортогональную систему, а система (10) образует базис в $L_2(0,1)$. Тогда произвольная функция $\psi(x) \in L_2(0,1)$ разлагается в биортогональный ряд:

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \mathrm{X}_k(x),$$

где

$$\psi_k = \int_0^1 \psi(x)\mathrm{Y}_k(x)dx \qquad (k = 0,1,2,\ldots).$$

Для любой функции $\psi(x) \in L_2(0,1)$ справедлива оценка

$$\frac{3}{4}\|\psi(x)\|^2_{L_2(0,1)} \le \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k^2 \le 16\|\psi(x)\|^2_{L_2(0,1)} . \qquad (12)$$

Кроме того, в работах [2] и [3], при предположениях, что

$$\psi(x) \in C^{i-1}[0,1], \ \psi^{(i)}(x) \in L_2(0,1), \ \psi^{(2s)}(0) = 0 \ \left(s = \overline{0, \left[\frac{i-1}{2}\right]}\right),$$

$$\psi^{(2s-1)}(0) = \psi^{(2s-1)}(1) \quad \left(s = \overline{1, \left[\frac{i}{2}\right]}\right)$$

установлены справедливость оценок:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k^i \psi_{2k-1})^2 \le \frac{8}{(2\pi)^{2i}} \left\|\psi^{(i)}(x)\right\|^2_{L_2(0,1)}, \qquad (13)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k^i\psi_{2k})^2 \le \frac{8}{(2\pi)^{2i}}\left\|\psi^{(i)}(x)(1-x)-i\psi^{(i-1)}(x)\right\|_{L_2(0,1)},\quad i\ge 1. \quad (14)$$

Так как система (10) образует базис в $L_2(0,1)$ и системы (10) и (11) образуют биортогональную в $L_2(0,1)$ систему функций, то первую компоненту $u(x,t)$ классического решения $\{u(x,t), a(t)\}$ задачи (1)-(4) можно искать в виде:

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t)\mathrm{X}_k(x), \quad (15)$$

где

$$u_k(t)=\int_0^1 u_k(x,t)\mathrm{Y}_k(x)\,dx \qquad (k=0,1,2,\ldots) \quad (16)$$

являются решением следующей задачи:

$$a(t)u_0'(t)+p(t)u_0(t)=f_0(t), \quad (17)$$

$$a(t)u_{2k-1}'(t)+(p(t)+\lambda_k^2)u_{2k-1}(t)=f_{2k-1}(t) \quad (k=1,2,\ldots), \quad (18)$$

$$a(t)u_{2k}'(t)+(p(t)+\lambda_k^2)u_{2k}(t)=f_{2k}(t)-2\lambda_k u_{2k-1}(t) \quad (k=1,2,\ldots), \quad (19)$$

$$u_k(0)=\varphi_k \quad (k=01,2,\ldots), \quad (20)$$

где

$$f_k(t)=\int_0^1 f(x,t)Y_k(x)\,dx\ ,\quad \varphi_k=\int_0^1\varphi(x)Y_k(x)\,dx\,.$$

Теперь, из (17), (18), (19), с учетом (20), соответственно находим:

$$u_0(t)=\varphi_0 e^{-\int_0^t\frac{p(s)}{a(s)}ds}+\int_0^t\frac{f_0(\tau)}{a(\tau)}e^{-\int_0^t\frac{p(s)}{a(s)}ds}\,d\tau, \quad (21)$$

$$u_{2k-1}(t)=\varphi_{2k-1}e^{-\int_0^t\frac{p(s)+\lambda_k^2}{a(s)}ds}+\int_0^t\frac{f_{2k-1}(\tau)}{a(\tau)}e^{-\int_\tau^t\frac{p(s)+\lambda_k^2}{a(s)}ds}\,d\tau, \quad (22)$$

$$u_{2k}(t)=\varphi_{2k}e^{-\int_0^t\frac{p(s)+\lambda_k^2}{a(s)}ds}+\int_0^t\frac{f_{2k}(\tau)}{a(\tau)}e^{-\int_\tau^t\frac{p(s)+\lambda_k^2}{a(s)}ds}\,d\tau-$$

$$-2\lambda_k\varphi_{2k-1}e^{-\int_0^t\frac{p(s)+\lambda_k^2}{a(s)}ds}\int_0^t\frac{d\tau}{a(\tau)}-2\lambda_k\int_0^t\frac{1}{a(\tau)}\left(\int_0^\tau\frac{f_{2k-1}(\xi)}{a(\xi)}e^{-\int_\xi^t\frac{p(s)+\lambda_k^2}{a(s)}ds}\,d\xi\right)d\tau. \quad (23)$$

Подставив выражения (21), (22), (23) в выражение $u(x,t)$, получим:

$$u(x,t)=\left(\varphi_0 e^{-\int_0^t \frac{p(s)}{a(s)}ds}+\int_0^t \frac{f_0(\tau)}{a(\tau)} e^{-\int_0^t \frac{p(s)}{a(s)}ds} d\tau\right)x+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi_{2k-1} e^{-\int_0^t \frac{p(s)+\lambda_k^2}{a(s)}ds}+\int_0^t \frac{f_{2k-1}(\tau)}{a(\tau)} e^{-\int_\tau^t \frac{p(s)+\lambda_k^2}{a(s)}ds} d\tau\right)x\cos\lambda_k x+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi_{2k} e^{-\int_0^t \frac{p(s)+\lambda_k^2}{a(s)}ds}+\int_0^t \frac{f_{2k}(\tau)}{a(\tau)} e^{-\int_0^t \frac{p(s)+\lambda_k^2}{a(s)}ds} d\tau-2\lambda_k\varphi_{2k-1} e^{-\int_0^t \frac{p(s)+\lambda_k^2}{a(s)}ds}\int_0^t \frac{d\tau}{a(\tau)}-\right.$$

$$\left.-2\lambda_k\int_0^t \frac{1}{a(\tau)}\left(\int_0^\tau \frac{f_{2k-1}(\xi)}{a(\xi)} e^{-\int_\xi^\tau \frac{p(s)+\lambda_k^2}{a(s)}ds} d\xi\right)d\tau\right)\sin\lambda_k x. \qquad (24)$$

Из (24), очевидно, что

$$u_{xx}(1,t)=-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\left(\varphi_{2k-1} e^{-\int_0^t \frac{p(s)+\lambda_k^2}{a(s)}ds}+\int_0^t \frac{f_{2k-1}(\tau)}{a(\tau)} e^{-\int_\tau^t \frac{p(s)+\lambda_k^2}{a(s)}ds} d\tau\right). \qquad (25)$$

Теперь из (5), с учетом (25), находим:

$$a(t)=-\frac{p(t)h(t)}{h'(t)}+\frac{f(1,t)}{h'(t)}-\frac{1}{h'(t)}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\left(\varphi_{2k-1} e^{-\int_0^t \frac{p(s)+\lambda_k^2}{a(s)}ds}+\int_0^t \frac{f_{2k-1}(\tau)}{a(\tau)} e^{-\int_\tau^t \frac{p(s)+\lambda_k^2}{a(s)}ds} d\tau\right)$$

или

$$a(t)=-\frac{p(t)h(t)}{h'(t)}+\frac{f(1,t)}{h'(t)}-\frac{1}{h'(t)}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^2\left(\varphi_{2k-1}-\frac{f_{2k-1}(0)}{p(0)+\lambda_k^2}\right)e^{-\int_0^t \frac{p(s)+\lambda_k^2}{a(s)}ds}+\right.$$

$$\left.+\frac{f_{2k-1}(t)}{p(t)+\lambda_k^2}-\int_0^t \frac{d}{d\tau}\left(\frac{f_{2k-1}(\tau)}{p(\tau)+\lambda_k^2}\right)e^{-\int_\tau^t \frac{p(s)+\lambda_k^2}{a(s)}ds} d\tau\right). \qquad (26)$$

Легко видеть, что если $a(t)$ является решением уравнения (26), то пара $\{u(x,t),a(t)\}$ будет решением задачи (1)-(4), т.е. после нахождения $a(t)$, как решение уравнения (26), получим явное выражение для функции $u(x,t)$, которая является первой компонентой решения обратной краевой задачи (1)-(4). Поэтому поставленная задача сводится к определению

$a(t)$ из уравнения (26).

Предположим, что данные задачи удовлетворяют следующим условиям:

1°. $\varphi(x) \in C^4[0,1], \varphi^{(5)}(x) \in L_2(0,1)$, $\varphi(0) = \varphi''(0) = \varphi^{(IV)}(0)$,
$\varphi'(0) = \varphi'(1)$, $\varphi'''(0) = \varphi'''(1)$.

2°. $f(x,t) \in C^{2,1}(D_T)$, $\dfrac{\partial^{k+3}}{\partial t^k \partial x^3} f(x,t) \in L_2(D_T)$ $(k = 0,1)$,
$f(0,t) = f''(0,t) = 0$, $\dfrac{\partial}{\partial x} f(0,t) = \dfrac{\partial}{\partial x} f(1,t)$.

3°. $p(t), h(t) \in C^1[0,T]$, $p(t) > 0$, $h'(t) \neq 0$ при $t \in [0,T]$.

4°. $h(t)h'(t) < 0$, $\dfrac{1}{h'(t)}\left(\dfrac{f_{2k-1}(0)}{p(0)+\lambda_k^2} - \varphi_{2k-1}\right) \geq 0$,
$h'(t) f_{2k-1}(t) \geq 0$, $h'(t)\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{f_{2k-1}(t)}{p(t)+\lambda_k^2}\right) > 0$.

5°. $\varphi(1) = h(0)$.

Введем обозначения:

$$A(T) = \left\|\frac{1}{h'(t)}\right\|_{C[0,T]} \cdot \frac{\pi T}{\sqrt{6}}\left[\frac{1}{128\pi^{10}}\left\|1+\frac{p(t)}{\lambda_1}\right\|_{C[0,T]}\left\|\varphi^{(5)}(x)\right\|_{L_2(0,1)} + \right.$$
$$+\frac{1}{8\pi^6}\left\|1+\frac{p(t)}{\lambda_1}\right\|_{C[0,T]}\left\|\frac{\partial^3}{\partial x^3} f(x,0)\right\|_{L_2(0,1)} +$$
$$+16\sqrt{T}\left\|p'(t)\right\|_{C[0,T]} \cdot \left\|1+\frac{p(t)}{\lambda_1}\right\|_{C[0,T]} \sqrt{T}\left\|f(x,t)\right\|_{L_2(D_T)} +$$
$$\left. +\frac{2\sqrt{T}}{\pi^2} + \left\|1+\frac{p(t)}{\lambda_1}\right\|_{C[0,T]}\left\|\frac{\partial}{\partial^k x\, \partial t} f(x,t)\right\|_{L_2(D_T)}\right];$$

$G = \{a(t) \in C[0,T] : a_* \leq a(t) \leq a^*\}$,

где

$$a_* = \min_{0 \leq t \leq T}\left\{-\frac{p(t)h(t)}{h'(t)} + \frac{f(1,t)}{h'(t)}\right\},$$

$$a^* = \left\|-\frac{p(t)h(t)}{h'(t)} + \frac{f(1,t)}{h'(t)}\right\|_{C[0,T]} + \left\|\frac{1}{h'(t)}\right\|_{C[0,T]} \frac{\pi}{\sqrt{6}}\left[\frac{1}{128\pi^{10}}\left\|\varphi^{(5)}(x)\right\|_{L_2(0,1)} + \right.$$

$$+\frac{1}{8\pi^6}\left\|\frac{\partial^3}{\partial x^3}f(x,0)\right\|_{L_2(0,1)}+16\left\|\|f(x,t)\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(0,1)}+$$

$$\left.+16\|p'(t)\|_{C[0,T]}\sqrt{T}\|f(x,t)\|_{L_2(D_T)}+\frac{2}{\pi^2}\left\|\frac{\partial}{\partial x\partial t}f(x,t)\right\|_{L_2(D_T)}\right].$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия 1°-5° и

$$A(T)a_*^{-2}<1. \qquad (27)$$

Тогда уравнение (26) имеет единственное решение, принадлежащее G .

Доказательство. Обозначим правую часть (26) через $\mathrm{P}(a(t))$. Тогда получим

$$a(t)=\mathrm{P}(a(t)). \qquad (28)$$

Теперь, рассмотрим оператор $\mathrm{P}(a(t))$ в G . Нетрудно доказать, что для любого $a(t)\in G$ имеет место неравенство:

$$a_*\le \mathrm{P}(a(t))\le a^*, \qquad (29)$$

а для любых $a_1(t),a_2(t)\in G$:

$$\|\mathrm{P}(a_2(t))-\mathrm{P}(a_1(t))\|_{C[0,T]}\le A(T)a_*^{-2}\|a_2(t)-a_1(t)\|_{C[0,T]}. \qquad (30)$$

Из неравенств (29), (30) следует, что оператор P действует в G и является сжимающим. Поэтому в G оператор P имеет единственную неподвижную точку $\{a\}$, которая является решением уравнения (26). Теорема доказана.

Теперь покажем, что $u(x,t)$, определяемая соотношением (24) с помощью положительного решения $a(t)$ уравнения (26), представляет первую компоненту решения $\{u(x,t),a(t)\}$ задачи (1)-(4).

Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1, тогда задача (1)-(4) имеет единственное классическое решение.

Для доказательства теоремы показывается, что функция $u(x,t)$, определяемая соотношением (24), непрерывна в D_T вместе со всеми производными, входящими в уравнения (1), и непосредственной подстановкой проверяется, что пара $\{u(x,t),a(t)\}$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2)-(4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием –ДУ, 1977, т.13, №2, стр.294-304.
2. Намазов Г.К., Мегралиев Я.Т. Обратная краевая задача для параболического уравнения с нелокальными краевыми условиями. –Вестник Бакинского Уни-

версиситета, серия физико-математических наук, 2003, №1, с.116-121.
3. Худавердиев К.И., Исмаилов А.И. Исследование классического решения одной несамосопряженной одномерной обратной краевой задачи для одного класса полулинейных дифференциальных уравнений третьего порядка. – Рукопись депонирована в АЗНИИНТИ 03.07.1998, №2566 –Аз.98, 110с.

İKİ TƏRTİBLİ PARABOLİK TƏNLİYİN ÖZ-ÖZÜNƏ QOŞMA OLMAYAN SƏRHƏD ŞƏRTİ DAXİLİNDƏ NAMƏLUM ƏMSALININ TƏYİN EDİLMƏSİ MƏSƏLƏSİ

Q.K.NAMAZOV, G.X.ŞƏFİYEVA

ANNOTASİYA

İş iki tərtibli parabolik tənlik üçün öz-özünə qoşma olmayan sərhəd şərti daxilində bir tərs sərhəd məsələsinin klassik həllinin varlıq və yeganəliyinə həsr olunmuşdur.

THE PROBLEM ON A DETERMINATION OF THE UNKNOWN COEFFICIENT OF THE PARABOLIC EQUATION OF SECOND ORDER WITH NONSELF-ADJOINT BOUNDARY CONDITIONS

G.K.NAMAZOV, G.Kh.SHAFIYEVA

ABSTRACT

The work is devoted to the studing the questions of the existence and uniqueness of classic solutions of a inverse boundary problem for the parabolic equations of second order with nonself-adjoint boundary conditions.